BAB II

SISTIM BILANGAN KOMPLEX

II.1. BILANGAN KOMPLEX DAN PENYAJIANNYA SECARA ILMU UKUR.

Suatu bilangan komplex mempunyai bentuk $x + iy$, dimana x dan y adalah bilangan-bilangan riil dan i adalah satuan imaginer dengan sifat $i^2 = -1$. Selanjutnya, jika $z = x + iy$ maka x dan y berturut-turut disebut bagian riil dan bagian imaginer dari z, dan dinotasikan dengan :

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z$$

Apabila $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan bilangan-bilangan riil, maka $\mathbb{C}$ menyatakan himpunan bilangan-bilangan komplex.

Dua bilangan komplex $x_1 + iy_1$ dan $x_2 + iy_2$ adalah sama jika hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$. Jika $y = 0$, maka $z = x$ merupakan bilangan riil. Dengan demikian $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Jika $x = 0$, maka $z = iy$ disebut bilangan imaginer murni.

Operasi-operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dari bilangan-bilangan komplex dapat dikerjakan seperti halnya pada aljabar dari bilangan-bilangan riil, dengan mengganti i^2 dengan -1 bila ditemui.

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka :

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

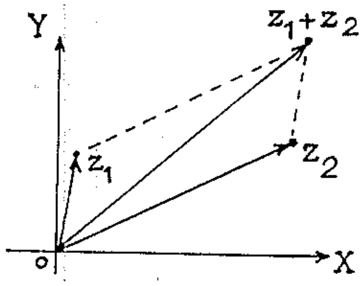
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \left(x_1 x_2 + y_1 y_2\right) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2) \quad , \quad z_2 \neq 0$$

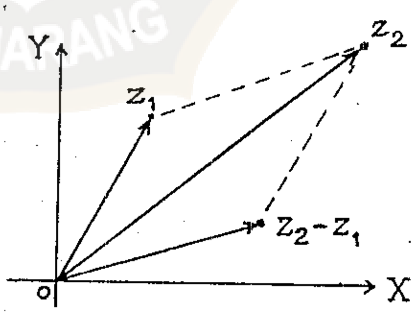
Adapun hukum komutatif, assosiatif dan distributif juga berlaku pada operasi-operasi di atas.

Suatu bilangan komplex $z = x + iy$ dapat pula dituliskan dalam bentuk pasangan berurutan dari dua bilangan riil, yaitu $z = (x,y)$. Dengan demikian setiap bila -

ngan komplex dapat disajikan sebagai suatu titik di dalam koordinat Cartesius dengan sumbu-sumbu koordinat X dan Y yang berpotongan tegak lurus di $z = 0$. Sumbu X disebut sumbu riil, sedangkan sumbu Y disebut sumbu imaginer. Bidang XOY disebut bidang komplex atau bidang Z. Setiap titik pada bidang komplex ini berkorespondensi satu-satu dengan suatu bilangan komplex.

Selain itu, bilangan komplex $z = x + iy$ dapat pula disajikan sebagai suatu vektor dari titik pangkal 0 ke titik (x,y). Bila $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka bilangan $z_1 + z_2$ dapat disajikan sebagai titik $(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2)$ atau sebagai vektor hasil jumlah vektor z_1 dan z_2. Sama halnya, $z_2 - z_1$ adalah titik (x_2-x_1, y_2-y_1) atau jumlah vektor z_2 dan $-z_1$, dalam hal ini $z_2 - z_1$ dapat juga diinterprestasikan sebagai vektor dari titik (x_1,y_1) ke titik (x_2,y_2)





DEFINISI.

Modulus dari suatu bilangan komplex $z = x + iy$ adalah suatu bilangan riil non-negatif yang dinotasikan dengan :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

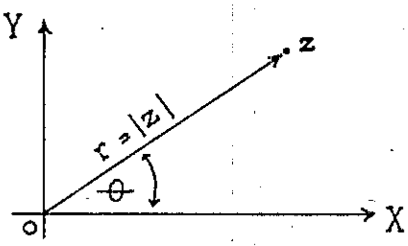
Secara ilmu ukur, bilangan $|z|$ menyatakan jarak titik $z = (x,y)$ dari titik pangkal 0. Sedangkan :

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

menyatakan jarak titik $z_2 = (x_2,y_2)$ dan $z_1 = (x_1,y_1)$

DEFINISI.

Argumen dari bilangan komplex $z = x + iy$ adalah dut yang dibentuk oleh vektor z dan sumbu riil positif , dan dinotasikan dengan : arg z.



Bila $z \neq 0$ suatu titik di bidang Z, maka $r = z$ dan $\theta =$ arg z merupakan komponen-komponen dari suatu sistim koordinat kutub untuk z, dengan :

$$x = r \cos\theta \quad \text{dan} \quad y = r \sin\theta$$

Maka dapat dituliskan :

$$z = x + iy = r \operatorname{cis}\theta$$

dimana $\operatorname{cis}\theta$ singkatan dari $\cos\theta + i \sin\theta$.

Apabila komponen-komponen koordinat Cartesius x dan y diketahui, maka r dan θ dapat dicari dengan :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{dan} \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

Untuk $z = 0$, maka $\theta = \arg 0$ tidak dapat ditentukan. Maka hanya bilangan komplex yang bukan nol yang dapat dituliskan dalam koordinat kutub. Selanjutnya, karena :

$$z = r \operatorname{cis}\theta = r \operatorname{cis}(\theta + 2n\pi)$$

untuk $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, maka arg z tidaklah tunggal. Harga utama dari arg z didefinisikan sebagai harga tunggal dari arg z, sedemikian hingga $-\pi < \arg z < \pi$. Bila θ adalah harga utama dari arg z, maka $\arg z = \theta + 2n\pi$, untuk $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Tetapi untuk $n \neq 0$, harga-harga dari arg z di atas bukanlah harga utama dari arg z.

Jika $z_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$ dan $z_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$, maka :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \operatorname{cis}\theta_1}{r_2 \operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) \quad , \quad \text{untuk } z_2 \neq 0.$$

Sehingga proses pengambilan argumen sama dengan proses pengambilan logaritma.

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \quad , \quad z_2 \neq 0$$

Bentuk lain dari bilangan komplex adalah bentuk eksponential. Dengan mengingat penderetan Mc. Laurin untuk e^t, yaitu $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} t^n / n!$, maka dengan mengambil $t = i\theta$ didapat rumus Euler :

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \cos\theta + i \sin\theta$$

Sehingga suatu bilangan komplex z dapat disajikan dengan :

$$z = r \operatorname{cis}\theta = r e^{i\theta}$$

dimana $\left|e^{i\theta}\right| = \left|\operatorname{cis}\theta\right| = 1$

Dari $e^{i\theta} = \operatorname{cis}\theta$, didapat pula $e^{-i\theta} = \operatorname{cis}(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$. Sehingga didapatkan :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ dan } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Contoh 1.

Untuk $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, maka $r = \left|2 + 2\sqrt{3}\,i\right| = \sqrt{4 + 12} = 4$

$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = \pi/3$. Maka dapat dituliskan

$2 + 2\sqrt{3}\,i = 4 \operatorname{cis}(\pi/3 + 2n\pi) = e^{i(\pi/3 + 2n\pi)}$

untuk $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$, dimana $\pi/3$ adalah harga utama dari $\arg(2 + 2\sqrt{3}\,i)$.

Contoh 2.

Dengan menggunakan rumus Euler, maka dapat dituliskan :

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \operatorname{cis} y = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Demikian pula karena :

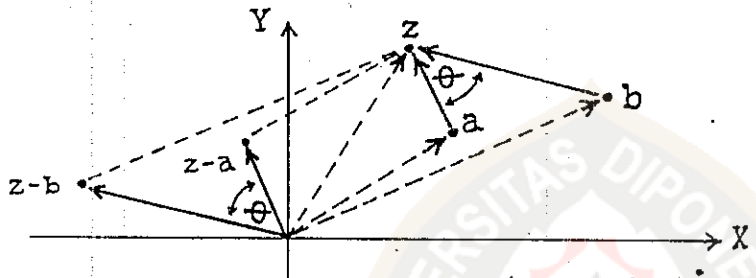
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \text{dan} \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

Maka :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{dan} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Contoh 3.

Bila $z, a, b \in \mathbb{C}$ dan θ sudut antara vektor $z - a$ dan vektor $z - b$, maka : $\arg \frac{z - a}{z - b} = \arg (z - a) - \arg (z - b) = -\theta$



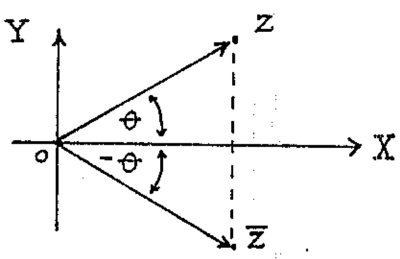
Dengan demikian : $\frac{z - a}{z - b} = \left|\frac{z - a}{z - b}\right| e^{-i\theta}$.

II.2. <u>SIFAT-SIFAT MODULUS DAN BILANGAN KOMPLEX SEKAWAN</u>.

DEFINISI.

Bilangan komplex sekawan atau conjugate dari bilangan komplex $z = x + iy$ adalah bilangan komplex $\bar{z} = x - iy$.

Oleh karena $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$ dan $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$, dan juga karena $\bar{z} = r \cos \theta - i\, r \sin \theta = r \operatorname{cis}(-\theta)$ sedemikian hingga $\arg \bar{z} = -\arg z$, maka $\bar{z}$ merupakan titik refleksi dari z terhadap sumbu riil.



Berikut ini diberikan sifat-sifat dari modulus dan bilangan komplex sekawan dari $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = r \operatorname{cis} \theta$.

1. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$ dan $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} (z - \bar{z})$.
2. $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$ dan $\arg \bar{z} = -\arg z$
3. $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$,

   $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

4. $\overline{\overline{z}} = z$
5. $|\overline{z}| = |z| = r$ dan $|z|^2 = \overline{z}.z$
6. $\overline{z} = z \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \text{Im } z = 0$.
7. $\overline{z} = -z \Longleftrightarrow$ z imaginer murni $\Longleftrightarrow \text{Re } z = 0$
8. $\text{Im}(cz) = c.\text{Im } z$ dan $\text{Re}(cz) = c.\text{Re } z$, $c \in \mathbb{R}$
9. $\text{Im}(iz) = \text{Im}(i\overline{z}) = \text{Re } z$
   $\text{Re}(iz) = -\text{Im } z$ dan $\text{Re}(i\overline{z}) = \text{Im } z$
10. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ dan $|e^{i\theta}| = |e^{-i\theta}| = 1$

Bila $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, maka berlaku :

1. $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re } z_1 + \text{Re } z_2$
   $\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im } z_1 + \text{Im } z_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 . \overline{z}_2$ dan $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
3. $\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z}_1/\overline{z}_2$ dan $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, $z_2 \neq 0$
4. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$
5. Ketidaksamaan segitiga :
   $$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$
6. $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 2\,\text{Re}(\overline{z}_1 z_2) = 2\,\text{Re}(z_1\overline{z}_2)$
   $z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 = 2i\,\text{Im}(z_1\overline{z}_2) = -2i\,\text{Im}(\overline{z}_1 z_2)$

Contoh 1.

Persamaan $|z - z_o| = r$, $r > 0$, merupakan persamaan lingkaran dengan pusat z_o dan jari-jari r. Misalkan $z = x + iy$, dan $z_o = x_o + iy_o$, maka :

$$|z - z_o|^2 = (z - z_o)(\overline{z} - \overline{z}_o) = r^2$$

$$|z|^2 - z_o\overline{z} - \overline{z}_o z + |z_o|^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_o x - 2y_o y - \{r^2 - (x_o^{\,2} + y_o^{\,2})\} = 0$$

merupakan persamaan lingkaran dengan pusat $(x_o, y_o) = z_o$ dan jari-jari r.

Contoh 2.

Bila $\left| e^{i\theta} - 1 \right| = 2$ untuk $0 \leqslant \theta < 2\pi$, maka

$$(e^{i\theta} - 1)\overline{(e^{i\theta} - 1)} = (e^{i\theta} - 1)(e^{-i\theta} - 1) = 4$$

$$e^{i\theta}e^{-i\theta} - (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 1 = 4$$

$$\cos\theta = -1$$

Sehingga $\theta = \pi$

Contoh 3.

Bila $|z| < 1$, maka $\left|\mathrm{Im}(1 - \bar{z} + z^2)\right| < 3$, sebab :

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{Im}(1 - \bar{z} + z^2)\right| &= \left|\mathrm{Im}\{1 - \mathrm{Re}\ z + i\ \mathrm{Im}\ z + (\mathrm{Re}\ z)^2 - (\mathrm{Im}\ z)^2 + 2i\ \mathrm{Re}\ z\ \mathrm{Im}\ z\}\right| \\
&= \left|\mathrm{Im}\ z + 2\ \mathrm{Re}\ z . \mathrm{Im}\ z\right| \\
&\leqslant \left|\mathrm{Im}\ z\right| + 2\left|\mathrm{Re}\ z\right|\left|\mathrm{Im}\ z\right| \leqslant |z| + 2|z|^2 \\
&< 3
\end{aligned}$$

Contoh 4.

Bila $|z| = 2$, maka $\left|\dfrac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leqslant \dfrac{1}{3}$, sebab :

$$\begin{aligned}
\left|z^4 - 4z^2 + 3\right| &= \left|(z^2 - 3)(z^2 - 1)\right| \\
&= \left|z^2 - 3\right|\left|z^2 - 1\right| \\
&\geqslant \left||z|^2 - 3\right|\left||z|^2 - 1\right| \\
&= 3
\end{aligned}$$

Contoh 5.

$$\begin{aligned}
\text{Untuk } w = \frac{z - i}{iz + 2} &= \frac{1}{|iz + 2|^2}\left\{(z - i)(-i\bar{z} + 2)\right\} \\
&= \frac{-1}{|iz + 2|^2}\left\{i|z|^2 + 2i + \bar{z} - 2z\right\} \\
&= \frac{-1}{|iz + 2|^2}\left\{i\left(|z|^2 + 2 - 3\ \mathrm{Im}\ z\right) - \mathrm{Re}\ z\right\}
\end{aligned}$$

Sehingga :

$$\mathrm{Re}\ w = \frac{\mathrm{Re}\ z}{|iz + 2|^2}, \quad \mathrm{Im}\ z = \frac{-1}{|iz + 2|^2}\left\{|z|^2 + 2 - 3\mathrm{Im}\ z\right\}$$

II.3. RUMUS MOIVRE DAN PENARIKAN AKAR.

Misalkan $z_j = r_j \mathrm{cis}\,\theta_j \in \mathbb{C}$, untuk $j = 1,2,3,\ldots.$

Maka :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis} \theta_1 \operatorname{cis} \theta_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2)$$

$$z_1 z_2 z_3 = r_1 r_2 r_3 \operatorname{cis} \theta_1 \operatorname{cis} \theta_2 \operatorname{cis} \theta_3$$

$$= r_1 r_2 r_3 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\vdots$$

demikian seterusnya, akhirnya dengan induksi matematik didapat :

$$z_1 z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)$$

Jika $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z = r \operatorname{cis} \theta$, maka :

$$z^n = r^n (\operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis} (n\theta)$$

Sehingga didapat rumus Moivre :

$$(\operatorname{cis} \theta)^n = \operatorname{cis} (n\theta), \quad \text{atau}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos (n\theta) + i \sin (n\theta)$$

untuk n bulat positip.

Misalkan $w = \rho \operatorname{cis} \varphi$ adalah akar pangkat n dari $z = r \operatorname{cis} \theta$, atau $w = z^{1/n}$, untuk n bulat positif. Maka $z = w^n$. Dengan menggunakan rumus Moivre dan mengingat $\operatorname{cis} \theta = \operatorname{cis} (\theta + 2k\pi)$ untuk $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$, maka didapat :

$$\rho^n \operatorname{cis} (n\varphi) = r \operatorname{cis} (\theta + 2k\pi)$$

Sehingga $\rho^n = r$ dan $n\varphi = \theta + 2k\pi$, atau

$$\rho = r^{1/n} \quad \text{dan} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Untuk harga-harga φ yang berselisih kelipatan bulat dari 2π akan memberikan harga yang sama untuk cis φ. Maka untuk harga-harga k yang berselisih kelipatan bulat dari n akan memberikan harga yang sama untuk cis φ . Sehingga bila diambil $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ maka akan didapat n harga yang berlainan untuk cis φ . Jadi untuk $z \neq 0$ akan didapat n harga yang berlainan dari $w = z^{1/n}$, dimana :

$$z^{1/n} = r^{1/n} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, (n-1)$$

Demikian pula jika m dan n bulat positif, dimana m dan n tidak mempunyai pembagi persekutuan yang berserikat, maka

$$z^{m/n} = r^{m/n} \text{ cis } \left(\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0,1,\ldots(n-1)$$

juga mempunyai n harga yang berlainan.

Contoh 1.

Bila $z = 1 + i$, maka $r = |1 + i| = \sqrt{2}$ dan θ = arc tg 1 = $\pi/4$. Maka :

$$(1 + i)^{2/3} = (\sqrt{2})^{2/3}\text{cis } \left(\frac{2.\pi/4 + 2k\pi}{3}\right), \; k = 0,1,2$$

$k = 0$, maka $z_1 = 2^{1/3}\text{cis } \pi/6 = 2^{-2/3}(\sqrt{3} + i)$

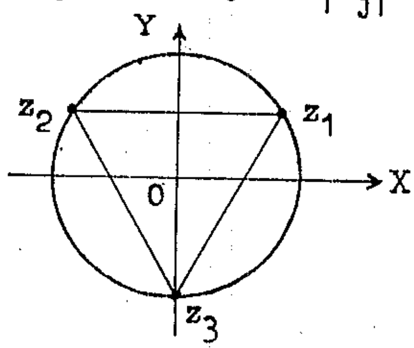
$k = 1$, maka $z_2 = 2^{1/3}\text{cis } 5\pi/6 = 2^{-2/3}(-\sqrt{3} + i)$

$k = 2$, maka $z_3 = 2^{1/3}\text{cis } 3\pi/2 = -2^{1/3}\, i$

Dapat diperlihatkan bahwa $z_j^{3/2} = 1 + i$ atau $z_j^{3} = (1 + i)^2 = 2i$, untuk $j = 1,2,3$. Misalkan :

$$z_1^{3} = 2^{-2}(\sqrt{3} + i)^3 = 2^{-2}.\ 8i = 2i$$

Secara sama akan didapatkan pula $z_2^{3} = z_3^{3} = 2i$. Sehingga $z_j^{3/2} = (1 + i)$, untuk $j = 1.2.3$. Secara ilmu ukur ketiga akar ini merupakan titik sudut dari segitiga yang terletak di dalam lingkaran dengan jari-jari $|z_j| = 2^{1/3}$.



Contoh 2.

Harga-harga dari z yang memeuhi $z^5 = -i$ dapat dicari dari $z = (-i)^{1/5}$. Karena $r = |-i| = 1$ dan θ = arc tg $(-1/0)$ = arc tg $(-\infty) = -\pi/2$. Sehingga :

$$z = 1^{1/5}\text{cis } \left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{5}\right), \qquad k = 0,1,2,3,4.$$

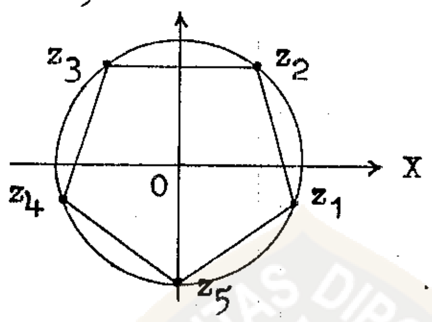
untuk $k = 0$, maka $z_1 = \text{cis } (-\pi/10)$

$k = 1$, maka $z_2 = \text{cis } (3\pi/10)$

$k = 2$, maka $z_3 = \text{cis } (7\pi/10)$

$k = 3$, maka $z_4 = \text{cis } (11\pi/10)$

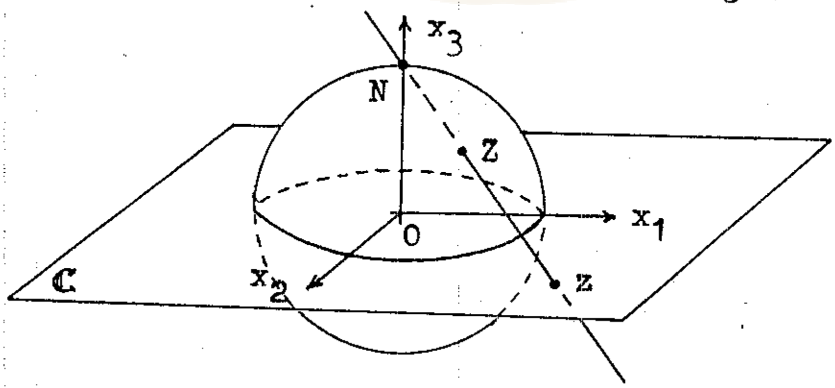
$k = 4$, maka $z_5 = \text{cis } (3\pi/2) = -i$



II.4. BIDANG KOMPLEX YANG DIPERLUAS.

Apabila titik di tak terhingga yang dinotasikan dengan ∞, dimasukkan ke bidang komplex, maka bidang ini disebut sebagai bidang komplex yang diperluas. Dengan demikian didapat notasi baru $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Untuk memberikan gambaran dari $\mathbb{C}_\infty$, kita pandang suatu bola satuan di $\mathbb{R}^3$ dengan pusat titik $z = 0$.

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$



Titik $N = (0,0,1)$ adalah kutub utara dari bola S. $\mathbb{C}$ memotong S sepanjang equator dari S, sehingga dapat dituliskan $\mathbb{C} = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Selanjutnya untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, dibuat garis lurus melalui z dan N yang memotong S tepat di satu titik $Z \neq N$. Jika $|z| > 1$, maka Z terletak di setengah permukaan bola bagian atas. Jika $|z| < 1$, maka Z di setengah permukaan bola S bagian bawah.

Jika $|z| = 1$, maka $Z = z$. Untuk ...

Sehingga titik-titik pada permukaan bola S menyajikan titik titik dari $\mathbb{C}_\infty$, dimana titik N sebagai proyeksi dari titik $z = \infty$.

Bola satuan S diatas disebut bola Riemann, sedangkan proyeksi yang menghasilkan korespondensi antara titik-titik dari S dengan titik-titik dari $\mathbb{C}_\infty$ disebut proyeksi ste - reografis.

Bila $Z = (x_1,x_2,x_3)$ berkorespondensi dengan $z = (x,y)$ maka garis lurus yang melalui Z, z dan N adalah :

$$\frac{x_1 - 0}{x - 0} = \frac{x_2 - 0}{y - 0} = \frac{x_3 - 1}{0 - 1} = t , \qquad t \in \mathbb{R}$$

Sehingga tempat kedudukan titik-titik pada garis itu adalah

$$\{(xt,yt,(1-t)) \mid -\infty < t < \infty\}$$

Bila garis lurus ini memotong S di Z, maka t memenuhi :

$$x^2t^2 + y^2t^2 + (1 - t)^2 = 1, \text{ atau}$$

$$(1 + |z|^2)t^2 - 2t = 0$$

yang merupakan persamaan kwadrat dalam t. Untuk $t \neq 0$ ($Z \neq N$), maka didapat :

$$t = \frac{2}{|z|^2 + 1}$$

Jadi :

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1} \quad , \; x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} \quad , \; x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

atau :

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \quad , \; x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1} \quad , \; x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

Jika $Z = (x_1,x_2,x_3)$ diketahui, untuk $Z \neq N$, maka $z = (x,y)$ dapat ditentukan dari $(x_1,x_2,x_3) = (xt,yt,(1-t))$. Dengan mengambil $t = 1 - x_3$, maka didapat :

$$z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

Contoh 1.

Setiap titik pada lingkaran $|z| = 1$ pada $\mathbb{C}$ akan diproyeksikan ke dirinya sendiri, sebab jika $z = x + iy$ pada lingkaran $|z| = 1$, maka :

$$x_1 = \frac{2x}{1 + 1} = x \ , \ x_2 = \frac{2y}{1 + 1} = y \ , \ x_3 = \frac{1 - 1}{1 - 1} = 0$$

Sehingga : $Z = (x_1,x_2,x_3) = (x,y,0) = z$

Contoh 2.

Proyeksi dari $z = 1 + i$ adalah :

$$Z = (x_1,x_2,x_3) = (2/3,2/3,1/3)$$

Sedangkan titik $Z = (0,0,-1)$ adalah proyeksi dari titik :

$$z = \frac{0 + i.0}{1 - (-1)} = 0$$

Contoh 3.

Proyeksi sumbu riil X pada $\mathbb{C}$, yang mempunyai persamaan $y = 0$, ke S adalah :

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + 1} \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_3 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Karena $x_2 = 0$ dan $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2 = 1$

maka proyeksi dari sumbu riil adalah lingkaran satuan pada bidang $x_1 0 x_3$.